2001年7月 第24卷 第4期
四川师范大学学报(自然科学版)
Journal of Sichuan Normal University (Natural Science)
July, 2001 Vol. 24, No. 4

一类波动方程解的渐近行为

谭 良[1]， 甘在会[2]

(1. 四川师范大学 物理系，四川 成都 610066； 2. 四川师范大学 数学系，四川 成都 610066)

摘要：研究三维空间中一类非线性波动方程解的渐近理论，在古典空间 C^2 中得到了渐近近似解的合理性在长时间 $t\in[0, |\varepsilon|^{-\frac{1}{2-k(p-1)}}]$ (ε 充分小，$\frac{1}{p-1}< 2-k(p-1)< 1, p> 3$) 内成立.

关键词：非线性波动方程；渐近理论；时间阶函数

中图分类号：O175.29　　文献标识码：A　　文章编号：1001-8395(2001)04-0332-04

0 引言

考虑如下非线性波动方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}+bu_t=\Delta u+\varepsilon F(u), \\ \quad t>0,\ x\in\mathbf{R}^3; \\ u(0,x,\varepsilon)=u_0(x,\varepsilon); \\ u_t(0,x,\varepsilon)=u_1(x,\varepsilon), \quad x\in\mathbf{R}^3. \end{cases} \tag{1}$$

这里 b 是大于0的常数，$\Delta=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$，$\varepsilon$ 是小参数且 $0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1$，$F(u)$，$u_0(x,\varepsilon)$，$u_1(x,\varepsilon)$ 满足如下条件：

(i) $F\in C^2(\mathbf{R}), F(0)=F'(0)=F''(0)=0$；

(ii) 存在 $p>3, A>0$，使得对任意实有界函数 u, v 成立

$$|F''(u)-F''(v)|\leqslant A|w|^{p-3}|u-v|,$$

这里 $w=\max\{|u|, |v|\}$. 让 $v=0$，有

$$|F''(u)|\leqslant A|u|^{p-2},$$

$$|F'(u)|\leqslant\frac{A}{p-1}|u|^{p-1}, \quad |u|\leqslant 1,$$

$$|F(u)|\leqslant\frac{A}{p(p-1)}|u|^{p}, \quad |u|\leqslant 1;$$

(iii) 对多重指标 α, β ($|\alpha|\leqslant 3, |\beta|\leqslant 2$)，存在不依赖于 ε 的常数 B，使得

$$|\partial_x^\alpha u_0(x,\varepsilon)|, |\partial_x^\beta u_1(x,\varepsilon)|\leqslant \frac{B}{(1+|x|)^{k+3}}, \quad 0<k<1, B>0.$$

正如 W. T. Van Horssen 在文[1,2]中指出的一样，在研究偏微分方程解的渐近理论时，最关键的便是得到一个较优化的时间阶函数 $T=O(|\varepsilon|^{-\sigma})$ ($\sigma>0$，即 $0\leqslant t\leqslant O(|\varepsilon|^{-\sigma})$)，当 σ 越大，解存在的时间便越长. 对一维空间中非线性波动方程解的渐近理论，文[1～4]得到的时间阶函数为 $T=O(|\varepsilon|^{-1})$，对三维空间中半线性波动方程初值问题解的渐近理论，文[5]得到的时间阶函数为 $T=O(|\varepsilon|^{-1})$. 本文研究问题(1)的渐近理论，得到了更优化的时间阶函数

$$T=O(|\varepsilon|^{-\frac{1}{2-k(p-1)}}),$$
$$0<2-k(p-1)<1,\ 0<k<1,\ p>3.$$

为简单起见，本文用 C 代表任意的正常数，它可能依赖于 k, p, A, B，但不依赖于小参数 ε.

1 适定性

为证明问题(1)在空间 C^2 中解的存在唯一性，由文[6]知，问题(1)等价于积分方程：

$$u(t,x,\varepsilon)=e^{-\frac{b}{2}t}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1}u_0(x+t\omega,\varepsilon)d\sigma_\omega\Big)+$$
$$\frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1}u_1(x+t\omega,\varepsilon)d\sigma_\omega+$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_0^t\int_{|\omega|=1}\frac{ht}{2\pi}r\frac{I_1(2h\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}u_0(x+r\omega,\varepsilon)d\sigma_\omega dr\Big)+$$
$$\int_0^t\int_{|\omega|=1}\frac{ht}{2\pi}r\frac{I_1(2h\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}u_1(x+r\omega,\varepsilon)d\sigma_\omega dr+$$
$$\varepsilon\int_0^t\frac{t-\tau}{4\pi}\int_{|\omega|=1}F(u(\tau,x+(t-\tau)\omega,\varepsilon),\varepsilon)d\sigma_\omega d\tau+$$
$$\varepsilon\int_0^t\int_0^{t-\tau}\int_{|\omega|=1}\frac{h(t-\tau)}{2\pi}r\frac{I_1(2h\sqrt{(t-\tau)^2-r^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}\times$$
$$F(u(\tau,x+r\omega,\varepsilon),\varepsilon)d\sigma_\omega drd\tau)=$$

收稿日期：2000-11-13
作者简介：谭 良(1972-)，男，讲师

$$e^{-\frac{b}{2}t}(u^0(t,x,\varepsilon)+v^0(t,x,\varepsilon)+ w^0(t,x,\varepsilon)+k^0(t,x,\varepsilon)). \qquad (2)$$

这里 $r=|x-y|$, $I_1(x)$ 是第一类变形了的一阶 Bessel 函数

$$I_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(\frac{x}{2})^{2k+1}}{k!(k+1)!},\quad h=\frac{b}{4},$$

ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个单位向量, $d\sigma_\omega$ 是半径为 1 的球面元.

令 $J_k=\{(t,x)\mid 0\leqslant t\leqslant T, x\in\mathbf{R}^3\}$, 设 $C^2(J_k)$ 为所有二次连续可微的实值函数 w 构成且

$$\|W\|_{J_k}=\sup_{(t,x)\in J_k}((1+t+|x|)^k\times \|W(t,x,\varepsilon)\|)<\infty. \qquad (3)$$

这里

$$\|W(t,x,\varepsilon)\|=\sum_{0\leqslant j+i_1+i_2+i_3\leqslant 2}\left|\frac{\partial^{j+i_1+i_2+i_3}W(t,x,\varepsilon)}{\partial t^j\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\partial x_3^{i_3}}\right|.$$

引理 1　设 $0<k<1$, 则

$$\frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1}(1+|x+t\omega|)^{-k-1}d\sigma_\omega\leqslant\frac{C}{(1+t+|x|)^k},$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{|\omega|=1}(1+|x+t\omega|)^{-k-1}d\sigma_\omega\leqslant\frac{C}{(1+t+|x|)^k}.$$

证明见文[7].

引理 2　假设 $u_0(x,\varepsilon)$, $u_1(x,\varepsilon)$ 满足条件 (iii), 则

$$\|u^0(t,x,\varepsilon)\|\leqslant\frac{C}{(1+t+|x|)^k}.$$

证明见文[5].

由此有

$$\|e^{-\frac{b}{2}t}u^0(t,x,\varepsilon)\|\leqslant\frac{C}{(1+t+|x|)^k}.$$

作算子 $\wedge$ 如下:

$$\wedge u=e^{-\frac{b}{2}t}((\frac{\partial}{\partial t}(\frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1}u_0(x+t\omega,\varepsilon)d\sigma_\omega)+ \frac{t}{4\pi}\int_{|\omega|=1}u_1(x+t\omega,\varepsilon)d\sigma_\omega)+$$
$$(\frac{\partial}{\partial t}(\int_0^t\int_{|\omega|=1}\frac{ht}{2\pi}r\frac{I_1(2h\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}u_0(x+r\omega,\varepsilon)d\sigma_\omega dr)+$$
$$\int_0^t\int_{|\omega|=1}\frac{ht}{2\pi}r\frac{I_1(2h\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}u_1(x+r\omega,\varepsilon)d\sigma_\omega dr)+$$
$$\varepsilon(\int_0^t\frac{t-\tau}{4\pi}\int_{|\omega|=1}F(u(\tau,x+(t-\tau)\omega,\varepsilon),\varepsilon)d\sigma_\omega d\tau)+$$
$$\varepsilon(\int_0^t\int_0^{t-\tau}\int_{|\omega|=1}\frac{h(t-\tau)}{2\pi}r\frac{I_1(2h\sqrt{(t-\tau)^2-r^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}\times F(u(\tau,x+r\omega,\varepsilon),\varepsilon)d\sigma_\omega drd\tau)=$$
$$e^{-\frac{b}{2}t}(u^0(t,x,\varepsilon)+ v^0(t,x,\varepsilon)+w^0(t,x,\varepsilon)+k^0(t,x,\varepsilon)).$$

将证明积分算子 $\wedge$ 是 $C^2(J_k)$ 到 $C^2(J_k)$ 的压缩映象算子, 为此先给出如下两个引理:

引理 3　假定初值 $u_0(x,\varepsilon)$, $u_1(x,\varepsilon)$ 满足假设(iii), $0<k<1$, $0\leqslant t\leqslant T$, 那么

$$\|e^{-\frac{b}{2}t}v^0(t,x,\varepsilon)\|\leqslant\frac{C}{(1+t+|x|)^k}. \qquad (4)$$

证明

$$v^0(t,x,\varepsilon)=$$
$$\int_0^t\int_{|\omega|=1}\frac{h}{2\pi}r\frac{I_1(2h\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}u_0(x+r\omega,\varepsilon)d\sigma_\omega dr+$$
$$\int_0^t\int_{|\omega|=1}\frac{ht}{2\pi}r(\frac{I_1(2h\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}})_t u_0(x+r\omega,\varepsilon)d\sigma_\omega dr+$$
$$\int_{|\omega|=1}(-1)\frac{h^2t^2}{2\pi}u_0(x+t\omega,\varepsilon)d\sigma_\omega+$$
$$\int_0^t\int_{|\omega|=1}\frac{ht}{2\pi}r\frac{I_1(2h\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}u_1(x+r\omega,\varepsilon)d\sigma_\omega dr.$$

由 Bessel 函数的性质, 可设

$$\left|\partial_t^\alpha(\frac{I_1(2h\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}})\right|\leqslant M,$$
$$|\alpha|\leqslant 3,\ M\text{ 是正常数}. \qquad (5)$$

又

$$|e^{-\frac{b}{2}t}t^k|\leqslant A,\quad t\to\infty,$$
$$k\in\mathbf{R},\ A(\text{常数})>0. \qquad (6)$$

由假设(iii)、(5)、(6)以及引理 1, 类似于引理 2 的证明, 得到

$$\sum_{i=0}^{2}\left|\frac{\partial^i}{\partial t^i}(e^{-\frac{b}{2}t}v^0(t,x))\right|\leqslant\frac{C}{(1+t+|x|)^k}. \qquad (7)$$

对 $\frac{\partial(e^{-\frac{b}{2}t}v^0(t,x))}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2(e^{-\frac{b}{2}t}v^0(t,x))}{\partial x_i^2}$, $(i=1,2,3)$ 作类似的估计, 由

$$D_x u_0(x+t\omega,\varepsilon)=D_y u_0(x+t\omega,\varepsilon),$$
$$D_x u_0(x+r\omega,\varepsilon)=D_{y_1}u_0(x+r\omega,\varepsilon),$$
$$y_1=x+r\omega,$$

知

$$\sum_{0\leqslant j+i_1+i_2+i_3\leqslant 2}\left|\frac{\partial^{j+i_1+i_2+i_3}(e^{-\frac{b}{2}t}v^0(t,x,\varepsilon))}{\partial t^j\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\partial x_3^{i_3}}\right|\leqslant \frac{C}{(1+t+|x|)^k}. \tag{8}$$

由(7)、(8)式知

$$\|e^{-\frac{b}{2}t}v^0(t,x,\varepsilon)\|\leqslant\frac{C}{(1+t+|x|)^k}. \tag{9}$$

引理 4 如果条件(i)~(iii)成立,则当 $0<k<1$, $p>3$, $\frac{1}{p-1}<k<\frac{2}{p-1}$, 对任意 $u,v\in C^2(J_k)$, 成立:

(a) $\|\wedge u\|\leqslant\frac{C}{(1+t+|x|)^k}+\frac{C|\varepsilon|(1+t)^{2-k(p-1)}}{(1+t+|x|)^k}\|u\|_{J_k}$;

(b) $\|\wedge u-\wedge v\|\leqslant\frac{C|\varepsilon|(1+t)^{2-k(p-1)}}{(1+t+|x|)^k}\|u-v\|_{J_k}$.

证明 类似文[5]中引理3的证明.

于是由引理4有下面的适定性定理成立:

定理 1 假设条件(i)~(iii)成立, $0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1$, $p>3$, $\frac{1}{p-1}<k<\min\{1,\frac{2}{p-1}\}$, 则当 $0\leqslant t\leqslant T=O(|\varepsilon|^{-\frac{1}{2-k(p-1)}})$ 时,存在唯一不动点 $u\in C^2(J_k)$ 满足问题(1).

证明 对任意 $u,v\in C^2(J_k)$, 由引理4易得

$$\|\wedge u\|_{J_k}\leqslant C+C|\varepsilon|(1+T)^{2-k(p-1)}\|u\|_{J_k},\quad 0<t<T,$$

$$\|\wedge u-\wedge v\|_{J_k}\leqslant C|\varepsilon|(1+T)^{2-k(p-1)}\|u-v\|_{J_k},\quad 0<t<T.$$

选取充分小的 ε 使得 $C|\varepsilon|(1+T)^{2-k(p-1)}<\frac{1}{2}$, 即 $T=O(|\varepsilon|^{-\frac{1}{2-k(p-1)}})$. 则由压缩映象原理知,存在唯一的不动点 $u\in C^2(J_k)$ 满足问题(1).

2 形式近似解的合理性

因问题(1)包含了一个小参数 ε, 故可以用扰动方法去构造问题(1)的形式近似解.由于非线性问题的许多扰动方法是构造一个形式近似解在 ε 的某些阶下满足相应的微分方程,为说明所构造的形式近似解为渐近近似解,将作进一步分析.

假设在 $J_k\times[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$ 中,函数 $v(t,x,\varepsilon)$ 满足

$$\begin{cases} v_{tt}-\Delta v+bv_t=\varepsilon F(v)+|\varepsilon|^m c_1(t,x,\varepsilon),\\ m>1,\\ v(0,x,\varepsilon)=u_0(x,\varepsilon)+|\varepsilon|^{m-1}c_2(x,\varepsilon)=\\ v_0(x,\varepsilon),\quad 0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1,\\ v_t(0,x,\varepsilon)=u_1(x,\varepsilon)+|\varepsilon|^{m-1}c_3(x,\varepsilon)=\\ v_1(x,\varepsilon),\quad 0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1.\end{cases} \tag{10}$$

这里 F,u_0,u_1 满足条件(i)~(iii).假设

$$c_1(t,x,\varepsilon)\in C^2(J_k),$$

且

$$\|c_1(t,x,\varepsilon)\|\leqslant\frac{C}{(1+t+|x|)^{kp}}. \tag{11}$$

$$|\partial_x^\alpha c_2(x,\varepsilon)|,\ |\partial_x^\beta c_3(x,\varepsilon)|\leqslant\frac{C}{(1+|x|)^{k+3}},\quad |\alpha|\leqslant 3,\quad |\beta|\leqslant 2,\quad 0<k<1. \tag{12}$$

由定理1知,问题(10)存在唯一解 $v(t,x,\varepsilon)\in C^2(J_k)$. 如果 $u\in C^2(J_k)$ 是问题(1)的解,则有

$$\|v(t,x,\varepsilon)-u(t,x,\varepsilon)\|\leqslant\frac{C|\varepsilon|\|u-v\|_{J_k}(1+t)^{2-k(p-1)}+C|\varepsilon|^{m-1}}{(1+t+|x|)^k}.$$

选取 ε 充分小使得 $C|\varepsilon|(1+t)^{2-k(p-1)}<\frac{1}{2}$, 则有

$$\|v(t,x,\varepsilon)-u(t,x,\varepsilon)\|_{J_k}\leqslant\frac{1}{2}\|u-v\|_{J_k}+C|\varepsilon|^{m-1}. \tag{13}$$

由(13)式知

$$\|v(t,x,\varepsilon)-u(t,x,\varepsilon)\|_{J_k}=O(|\varepsilon|^{m-1}),\quad m>1.$$

于是便得到如下的渐近定理:

定理 2 假设 $v(t,x,\varepsilon)$ 是问题(10)的解, F,u_0,u_1 满足条件(i)~(iii), $c_1(t,x,\varepsilon)$, $c_2(x,\varepsilon)$, $c_3(x,\varepsilon)$ 满足条件(11)、(12),则当 $m>1$, $0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1$, $\frac{1}{p-1}<k<\min\{1,\frac{2}{p-1}\}$, $p>3$ 时,形式近似解 $v(t,x,\varepsilon)(\varepsilon\to 0)$ 是问题(1)的渐近近似解,且

$$\|u-v\|_{J_k}=O(|\varepsilon|^{m-1}).$$

参考文献

[1] Van Horssen W T. An asymptotic theory for a class of initial boundary value problems for weakly nonlinear wave equations with an application to a model of the galloping oscillation of overhead transmission lines[J]. SIAM J Appl Math, 1988, 48(6): 1243～1277.

[2] Van Horssen W T, Van Der Burgh A H P. On initial boundary value problems for weakly semilinear telegraph equations, asymptotic theory and application[J]. SIAM J Appl Math, 1988, 48(4): 719～737.

[3] Lai S Y. The asymptotic theory of solutions for a perturbed telegraph wave equation and its application[J]. Appl Math Mech, 1997, (7): 656～662.

[4] Blom C J, Van Der Burgh. Validity of approximations for time periodic solution of a forced nonlinear hyperbolic differential equation[J]. Appl Anal, 1994, 52(1～4): 155～176.

[5] Lai S Y, Mu C L. The asymptotic theory of initial value problems for semilinear wave equations in three space dimensions[J]. Appl Math JCU, 1997(12B): 321～332.

[6] Guenther R B, Lee J W. Partial Differential Equations of Mathematical physics and Integral Equations[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1988.

[7] Asakura F. Existence of a global solution to a semilinear wave equation with slowly decreasing initial data in three space dimensions[J]. Comm P D E, 1986, 13(11): 1459～1487, 1465～1466.

The Asymptotic Behavior of Solution for a Class of Wave Equations

TAN Liang[1], GAN Zai-hui[2]

(1. *Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu* 610066, *Sichuan*;
2. *Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu* 610066, *Sichuan*)

Abstract: In this paper, the authors deal with the asymptotic theory of initial value problems of nonlinear wave equations in three space dimensions. The validity of asymptotic approximations on a long time scale $t\in[0,|\varepsilon|^{-\frac{1}{2-k(p-1)}}]$ (ε is sufficiently small, $\frac{1}{p-1}<2-k(p-1)<1$, $p>3$) is discussed in the classical space C^2.

Key words: Nonlinear wave equations; Asymptotic theory; Time order function

2000 MSC: 35A07

（编辑　余　毅）